

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1] Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι μια καινούρια συνάρτηση που συμβολίζεται με $f'(x)$.
 Προέρχεται από την $f(x)$ αν βρούμε ένα συγκεκριμένο όριο.

$$f(x) \xrightarrow{\text{lim}} f'(x)$$

2] Μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο:

- σε ένα σημείο x_0 του π.ο. της συνάρτησης $f'(x_0)$
- και γενικά ως τύπο $f'(x)$.

3] Αν θέλουμε να βρούμε την παράγωγο σε ένα σημείο x_0 τότε μπορούμε να το κάνουμε με δύο τρόπους:

- Με τον ΟΡΙΣΜΟ: Διπλασι να υπολογίσουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$



ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- ΜΕ ΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ : Νο βράιμε τιν $f'(x)$
 με την βοήθεια των τύπων και έτσι βρούμε
 να αντικαταστήσουμε όπου $x = x_0$ δη

$$f'(x) \stackrel{x=x_0}{=} f'(x_0)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Εμείς θα χρησιμοποιούμε τα 2^ο τρόπο
 με τους τύπους, εκτός αν μας ζητηθεί να
 υπολογίσουμε την παράγωγο με τον ορισμό!

4] Η παράγωγος εκφράζει:

- Τον ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ σε ένα σημείο x_0
 δη ρυθμός μεταβολής στο $x_0 \Rightarrow f'(x_0)$
- Τον ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ της εφαπτομένης
 σε ένα σημείο x_0 της C_f .
 δη. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ στο $x_0 \Rightarrow f'(x_0)$



- Την **ταχύτητα** σε μια χρονική στιγμή το
δυν. ταχύτητα (v) για $t=t_0 \Rightarrow v(t_0)=x'(t_0)$
- Την **επιτάχυνση** σε μια χρονική στιγμή το
δυν. επιτάχυνση (a) για $t=t_0 \Rightarrow a(t_0)=v'(t_0)$

Προσοχή! Αρα μπορεί να μας ζητηθεί να βρούμε την παράγωγο σε ένα σημείο με έναν από τους παραπάνω τρόπους χωρίς να αναφερθεί η λέξη "παράγωγος".

5] Αν μας ζητηθεί να βρούμε την παράγωγο με τον ορισμό τότε:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Υπολογίζω το $f(x_0+h)$ και το $f(x_0)$
- Υπολογίζω το $f(x_0+h) - f(x_0)$
- Απλοποιώ στο όριο και αφού υπολογίσω το h γιατί θα είναι 0 υπολογίζω το όριο που θα είναι και η παράγωγος $f'(x_0)$.



ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1] ΣΤΑΘΕΡΗ : Αν $f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = (c)' = 0$

2] ΤΑΥΤΟΤΙΚΗ : Αν $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = (x)' = 1$

3] ΔΥΝΑΜΗ : Αν $f(x) = x^v \Rightarrow f'(x) = (x^v)' = v x^{v-1}$
 Το v μπορεί να είναι φυσικός, ακέραιος, ρητός

4] ηfx & swx :

Αν $f(x) = \eta f x \Rightarrow f'(x) = (\eta f x)' = \delta w x$

Αν $f(x) = \delta w x \Rightarrow f'(x) = (\delta w x)' = -\eta f x$

5] $\sqrt{x}$: Αν $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ΠΡΟΣΕΥΧ?

- Αν έχω δύναμη στον παρονομαστή :

$$\frac{1}{x^v} = x^{-v} \text{ οπότε } \left(\frac{1}{x^v}\right)' = (x^{-v})' = -v x^{v-1}$$

- Αν έχω ρίζα: $\sqrt[k]{x^v} = x^{v/k}$ οπότε

$$(\sqrt[k]{x^v})' = (x^{v/k})' = \frac{v}{k} x^{v/k-1}$$



ΠΑΡΑΓΟΓΙΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- Οποιοδήποτε παραγωγίσιμ που δεν είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή θεωρείται αριθμός και έχει παραγώγο 0.
 Π.χ. στην $f(x) = 5x + 2t^2 + 3t$ το $2t^2$ και $3t$ θεωρούνται αριθμοί αφού η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το x , άρα $(2t^2)' = 0$ και $(3t)' = 0$.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΟΓΙΣΗΣ

Για να υπολογίσω την παραγωγή παραστάσεων και συναρτήσεων χρησιμοποιούμε κάποιους κανόνες.

1. Γινόμενο Αριθμού με Συνάρτηση: $(\alpha \cdot f(x))' = \alpha f'(x), \alpha \in \mathbb{R}$

2. Άθροιση & Διαφορά Συναρτήσεων:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

3. Γινόμενο Συναρτήσεων:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$$



ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ4. Πηλίκο Συναρτήσεων :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ ! : ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

~~$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$~~

5. Συνθετή Συναρτηση :

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Αν μετά σε μια συνάρτηση f έχουμε μια νέα συνάρτηση g τότε η παράγωγος είναι:

$$\left(\begin{array}{l} \text{παράγωγος της } f \\ \text{από αντί για } x \\ \text{βάλω } g(x) \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \text{παράγωγος της} \\ g(x) \end{array} \right)$$

