

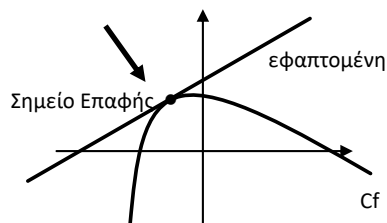
Εξίσωση εφαπτομένης μιας συνάρτησης

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης μιας συνάρτησης με γνωστό τύπο θα πρέπει:

Να μας δίνουν σημείο.

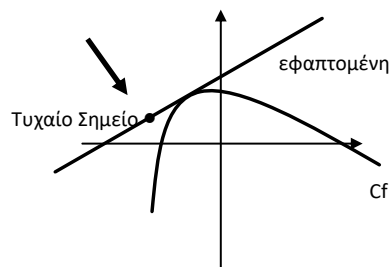
Αν **δεν** γνωρίζουμε ότι το σημείο που μας δίνει είναι σημείο επαφής, δηλαδή βρίσκεται πάνω στη Cf, θα πρέπει να το **ελέγξουμε** αντικαθιστώντας την τετμημένη x στην $f(x)$ και υπολογίζοντας την αντίστοιχη τεταγμένη $y=f(x)$. Δηλαδή θα πρέπει να την επαληθεύει.

1 Αν την επαληθεύει τότε **είναι** το σημείο επαφής.



Κ.Ν.ΣΩΤΗΡΙΑΔΗΣ

2 Αν δεν την επαληθεύει, τότε **δεν** είναι το σημείο επαφής αλλά ένα τυχαίο σημείο πάνω στην εφαπτομένη.



Να μας δίνουν το συντελεστή διεύθυνσης λ

3 Μπορεί να μας δίνεται **ΑΜΕΣΑ**



4 Μπορεί να μας δίνεται **ΕΜΜΕΣΑ**

- Με παράλληλη ευθεία : τότε έχουν ίδιο λ .
- Με κάθετη ευθεία : τότε έχουν αντίθετο και αντίστροφο λ .
- Η εφαπτομένη σε ένα σημείο σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία ω , τότε $\epsilon\phi\omega = \lambda$.
- Διχοτόμος 1^{ου}, 3^{ου} τεταρτημορίου τότε $\lambda=1$.
- Διχοτόμος 2^{ου}, 4^{ου} τεταρτημορίου τότε $\lambda=-1$.
- Παράλληλη με xx' τότε $\lambda=0$.

Msc Mathematics

Παραδείγματα Εύρεσης Εφαπτομένης

Σε κάθε περίπτωση πάντα ψάχνω το **σημείο επαφής** εκτός φυσικά στην περίπτωση που αυτό μας δίνεται.

❶ Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+1$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2,f(2))$.

Λύση

Στην περίπτωση αυτή το σημείο επαφής μας δίνεται ξεκάθαρα αφού βρίσκεται πάνω στην C_f , άρα δεν χρειάζεται να ελέγξω.

Το $M(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής $A(2, f(2))$ και $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης. Έτσι θα πρέπει :

1

- $x_0=2$
- $f(x_0)=f(2)=1$
- $\lambda = f'(x_0)=f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$

$$\star f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2$$



2

Αφού το M είναι πάνω στην εφαπτομένη την επαληθεύει, επομένως $x = x_0 = 2$, $y = f(x_0) = 1$ και $\lambda = f'(x_0) = 2$.

$$\text{Άρα } y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3.$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι η $y = 2x - 3$.

Προσοχή: Αν μας δίνεται μόνο η τεταγμένη δηλαδή το y , τότε, **Πρώτα** λύνω $f(x_0) = y$ και υπολογίζω το x_0 . Στην συνέχεια η λύση είναι ίδια.

2 Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+3$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχονται από το σημείο $A(0,-2)$.

Λύση

Στην περίπτωση δεν γνωρίζουμε αν το σημείο που δίνεται είναι το σημείο επαφής, άρα χρειάζεται να ελέγξω.

Ελέγχουμε αν το σημείο A είναι το σημείο επαφής.

Έτσι $f(0)=0^2-5\cdot 0+3=3$, παρατηρούμε ότι $f(0)=3\neq -2$ οπότε το A **δεν** είναι σημείο επαφής.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης.

1

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη, την επαληθεύει οπότε $x=0$ και $y=-2$.

Άρα $y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow -2=\lambda\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=-2$. Δηλαδή $y=\lambda x-2$.

2

Αφού το M είναι πάνω στην εφαπτομένη την επαληθεύει, επομένως

- $x = x_0$
- $y = f(x_0) = x_0^2 - 5x_0 + 3$
- $\lambda = f'(x_0) = 2x_0 - 5$

$$\star f'(x) = (x^2 - 5x + 3)' = 2x - 5$$

Άρα $y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow x_0^2-5x_0+3=(2x_0-5)\cdot x_0-2 \Leftrightarrow$

$$x_0^2-5x_0+3=2x_0^2-5x_0-2 \Leftrightarrow x_0^2=5 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{5}$$

Αν $x_0 = \sqrt{5}$ τότε $\lambda = 2\sqrt{5} - 5$, άρα $y = (2\sqrt{5} - 5)x + 3$.

Αν $x_0 = -\sqrt{5}$ τότε $\lambda = -2\sqrt{5} - 5$, άρα $y = (-2\sqrt{5} - 5)x + 3$.



③ Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρεθούν η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$.

Λύση

Στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής διεύθυνσης μας δίνεται άμεσα.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης.

1

Γνωρίζουμε ότι $\lambda=f'(x_0)$. (1)

Όμως:

- $\lambda=1$ (2)
- $f'(x_0)=2x_0-3$ (3)

$$2x_0-3=f'(x_0)=(x^2-3x+1)'=2x-3$$

Οπότε αντικαθιστώντας την (2) και (3) στην (1) υπολογίζουμε: $\lambda=f'(x_0) \Leftrightarrow 1=2x_0-3 \Leftrightarrow x_0=2$.

Έτσι έχουμε:

2

- $x_0=2$
- $f(x_0)=f(2)=2^2-3\cdot 2+1=-1$
- $\lambda=1$

3

Αφού το M είναι πάνω στην εφαπτομένη την επαληθεύει, επομένως $x=x_0=2$, $y=f(x_0)=-1$ και $\lambda=f'(x_0)=1$.

$$y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow -1=1\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=-3.$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$, είναι η $y=x-3$.



④ Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+11x+1$. Να βρεθούν η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y+x-1=0$.

Λύση

Στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής διεύθυνσης μας δίνεται έμμεσα.

1

Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία $y+x-1=0 \Leftrightarrow y=-x+1$ θα πρέπει το λ της εφαπτομένης να είναι ίσο με το $\lambda_{\text{ευθ}}$. Όμως $\lambda_{\text{ευθ}}=-1$, άρα $\lambda=\lambda_{\text{ευθ}}=-1$,

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης.

2

Γνωρίζουμε ότι $\lambda=f'(x_0)$. (1)

Όμως:

- $\lambda=-1$ (2)
- $f'(x_0)=\star-4x_0+11$ (3)

$$\star f'(x)=(-2x^2+11x+1)'=-4x+11$$

Οπότε αντικαθιστώντας την (2) και (3) στην (1) υπολογίζουμε: $\lambda=f'(x_0) \Leftrightarrow -1=-4x_0+11 \Leftrightarrow x_0=3$.

3

Έτσι έχουμε:

- $x_0=3$
- $f(x_0)=f(3)=-2\cdot 3^2+11\cdot 3+1=16$
- $\lambda=-1$

4

Αφού το M είναι πάνω στην εφαπτομένη την επαληθεύει, επομένως $x=x_0=3$, $y=f(x_0)=16$ και $\lambda=f'(x_0)=-1$.

$$\text{Άρα } y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow 16=-1\cdot 3+\beta \Leftrightarrow \beta=19.$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y+x-1=0$, είναι η $y=-x+19$.

