

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^3 + x + 1, x \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$

4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 5, x \in \mathbb{R}$

5. $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$

6. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 1, x \in \mathbb{R}$

7. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x, x \in \mathbb{R}$

8. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1, x \in \mathbb{R}$

9. $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$

10. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x - 1, x \in \mathbb{R}$

11. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$

12. $f(x) = 2x^3 - 3x^2, x \in \mathbb{R}$

13. $f(x) = 3x^4 + x^2 - 2, x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 5, x \in \mathbb{R}$

15. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

16. $f(x) = x + \frac{1}{2x^2}$

17. $f(x) = \frac{x}{x+1}$

18. $f(x) = x + \sqrt{x-1}$

19. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

20. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

21. $f(x) = x\sqrt{x+1}$

22. $f(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$



ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.

1. Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότητα της f .
2. Να συγκρίνεται τις τιμές $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ και $f(2025)$ $f(2026)$.
3. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(x) \geq 4$.
4. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ ισχύει $f(x) \leq -4$.
5. Αν $x \in [3, 4]$ να δείξετε ότι $\frac{13}{3} \leq f(x) \leq 5$.
6. Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε να δείξετε ότι $\frac{3f(\alpha) + 2f(\beta)}{2} \geq 10$.
7. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ η εξίσωση $2f(x) = 2$ είναι αδύνατη.
8. Να λυθεί η εξίσωση $5f(x) + 5 = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1, x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότητα της f .
2. Να συγκρίνεται τις τιμές $f(3)$, $f(\pi)$ και $f(2)$ $f\left(\frac{5}{2}\right)$.
3. Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $f(x) \leq 1$.
4. Να δείξετε ότι για κάθε $x \leq 3$ ισχύει $f(x) \geq -\frac{1}{3}$.
5. Αν $x \in [2, 3]$ να δείξετε ότι $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.
6. Αν $\alpha, \beta > 1$ τότε να δείξετε ότι $\frac{f(\alpha) + 3f(\beta)}{2} \leq 2$.
7. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) - 2 = 0$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$.
8. Να λυθεί η εξίσωση $2f(x) + 6 = 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 3]$.

