

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

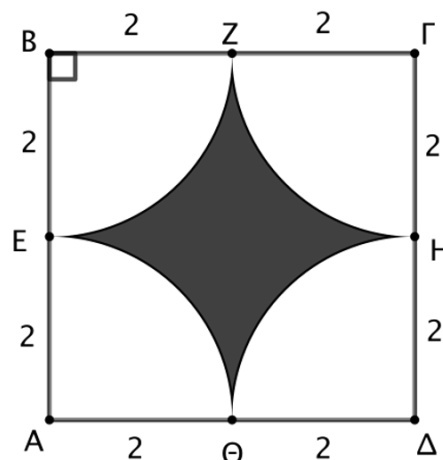
ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $a = 4$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

$$E = 4(4 - \pi)$$

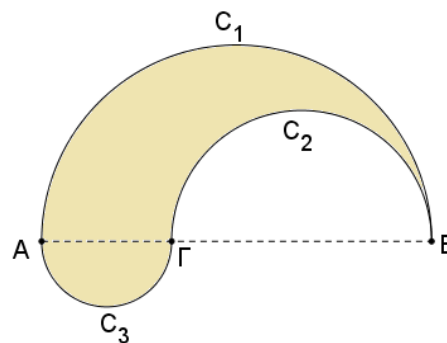


ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6$, και σημείο του Γ, ώστε $BΓ = 4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1 , C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



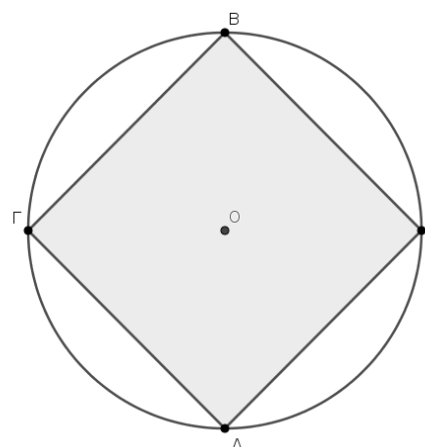
ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π .

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

- Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

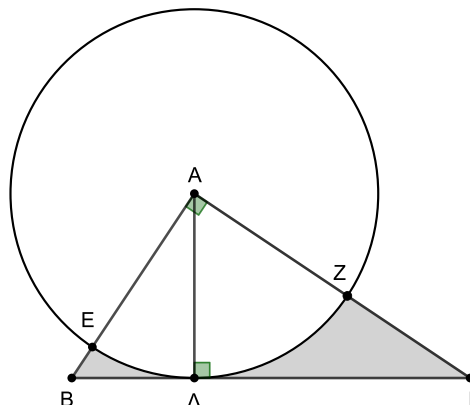


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

ΑΣΚΗΣΗ 4

Στο παρακάτω σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτείνουσα $B\Gamma = 13$ και αντίστοιχο ύψος $AD = 6$. Με κέντρο το A και ακτίνα AD γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, στα σημεία E και Z αντίστοιχα.



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

- του κυκλικού τομέα $A\widehat{E\Delta Z}$,
- του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

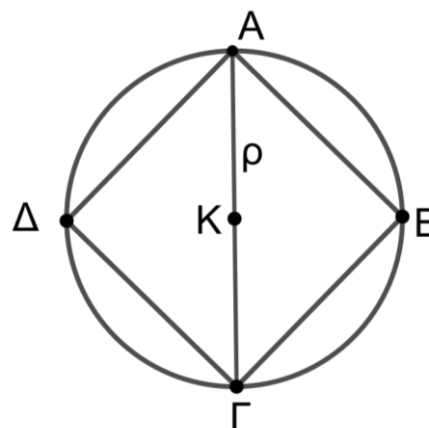
ΑΣΚΗΣΗ 5

Σε κύκλο (K, ρ) εμβαδού $E = 4\pi$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (K, ρ) .

β) το μήκος της διαμέτρου $A\Gamma$ του κύκλου (K, ρ) και της πλευράς AB του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



ΑΣΚΗΣΗ 6

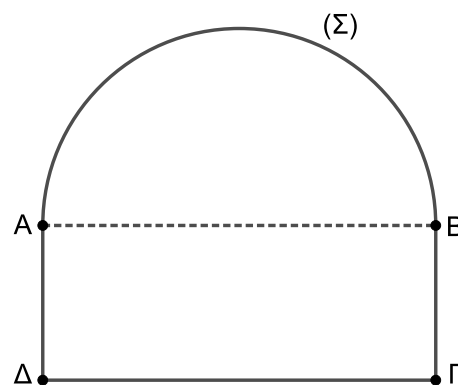
Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $AB = 8 \text{ cm}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = 8\pi \text{ cm}^2$,
- το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = 4\pi \text{ cm}$.

β) Να βρείτε:

- το μήκος της πλευράς $A\Delta$ του ορθογώνιου,
- την περίμετρο του σχήματος (Σ) .

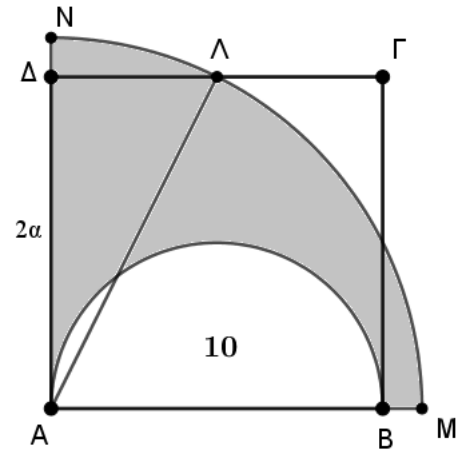


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

ΑΣΚΗΣΗ 7

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $2a$ και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{80}{\pi}.$$

ii. $AL^2 = \frac{100}{\pi}$

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο $\widehat{AMN}$, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ.

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\widehat{AMN}$ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ

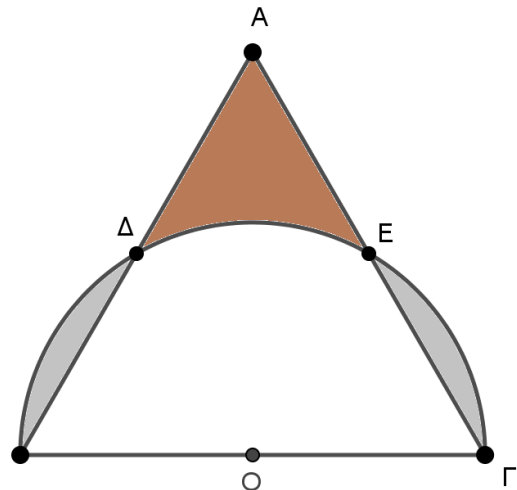
ΑΣΚΗΣΗ 8

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, πλευράς $2a$. Με διάμετρο τη ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Αν Ο είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma = a\sqrt{3}$.

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο Β εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $E = \frac{(2\pi-3\sqrt{3})a^2}{6}$.

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΑΕ και το τόξο ΔΕ είναι: $E' = \frac{(3\sqrt{3}-\pi)a^2}{6}$

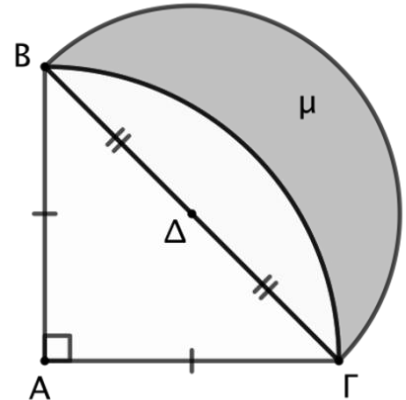


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 2\rho$. Με διάμετρο $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $\widehat{AB\Gamma}$ με κέντρο το A και ακτίνα AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.



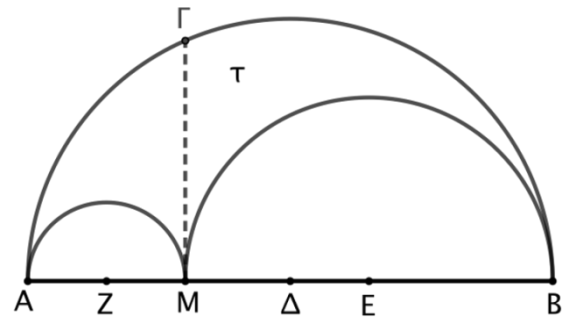
α) Να αποδείξετε ότι $AB = \rho\sqrt{2}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ .

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του M , τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους AM , MB και AB γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του AB , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου AB και της κάθετης από το M στο AB .



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια $\widehat{ZAM}$, $\widehat{EMB}$ και $\widehat{\Delta AB}$, όπου Z , E , Δ είναι τα μέσα των AM , MB και AB αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου $M\Gamma$.

δ) Για ποια θέση του M μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ ;

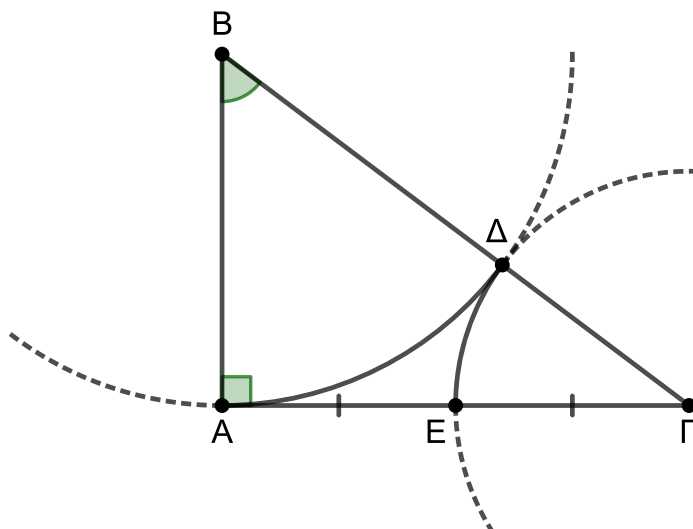


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Έστω ότι το E είναι το μέσο της $A\Gamma$.



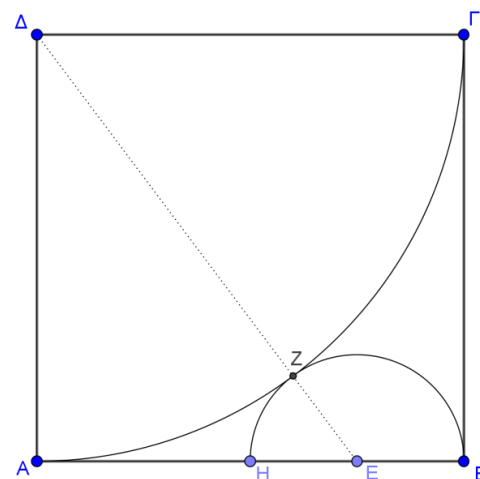
α) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3}R$.

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και E_2 το εμβαδόν του κύκλου (B, R) . Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$.

γ) Έστω $\hat{B} = \mu^\circ$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $B\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Delta}E$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς 8. Με κέντρο το Δ κατασκευάζουμε το τόξο $A\Gamma$. Το ημικύκλιο με διάμετρο BH εφάπτεται στο τόξο $A\Gamma$ στο Z και το E είναι το κέντρο του ημικυκλίου.



α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του ημικυκλίου.

β) Αν $\rho=2$, να υπολογίσετε:

i. Τα εμβαδά του τετραγώνου, του τεταρτοκυκλίου και του ημικυκλίου.

ii. Την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος $AZ\Gamma BZHA$ που βρίσκεται εντός του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ και εκτός του ημικυκλίου και του τεταρτοκυκλίου.

