

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις.

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Δίνεται η εξίσωση  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης  $(x^3 - 7x + 6):(x - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με το πολυώνυμο  $2x - 1$  δίνει πηλίκο  $x^2 - 2$  και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο  $P(x)$ .

β) Αν  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

i. να αποδείξετε ότι το  $P(x)$  έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης  $P(x):(x - 1)$ .

ii. να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

α) Να γράψετε το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$  ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις.

**ΑΣΚΗΣΗ 5**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 7x + 6$ .

α) Να δείξετε ότι το  $x - 2$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 6**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 2x - 3, x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $(x + 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) + 6 = 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 7**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .

α) Να παραγοντοποιήσετε το  $P(x)$ .

β) Αν  $P(x) = (x+1)^2(x-1)$  να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \geq 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ .

α) Να παραγοντοποιήσετε το  $P(x)$ .

β) Αν  $P(x) = (2x-1)(x^2+1)$  να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \geq 0$ .



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις.

**ΑΣΚΗΣΗ 9**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$  το οποίο διαιρούμενο με το  $x^2 - 4$  δίνει υπόλοιπο  $4x + 1$ .

α) Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x^2 - 4)$ .

β) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

γ) Έστω  $\alpha = 4$  και  $\beta = 5$ . Αν το πηλίκο της διαίρεσης  $P(x) : (x^2 - 4)$  είναι το  $\pi(x) = x^3 - 1$ , τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης  $P(x) : (x^2 - 4)$ .

ii. να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 4x + 1$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 10**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$ , αν είναι γνωστό ότι το  $P(x)$  διαιρείται με το πολυώνυμο  $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ .

β) Για  $\alpha = 4, \beta = -2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x^2 + 5)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. Αν  $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$  να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 14(x + 2)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 11**

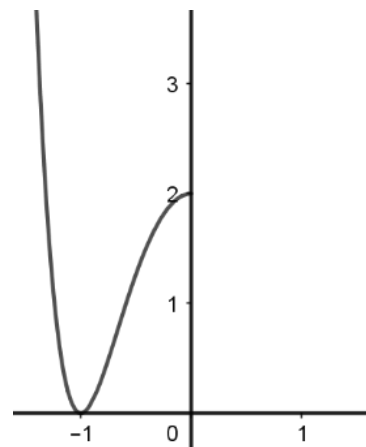
Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f$  είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $x'$ .

γ) Να συμπληρώσετε στο διπλανό σχήμα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  για  $x > 0$ .

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις.

**ΑΣΚΗΣΗ 12**

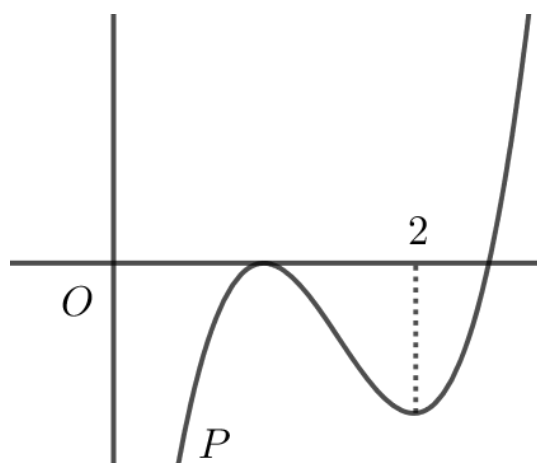
α) Δίνεται το πολύωνμο  $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$ , με  $x \in \mathbb{R}$ .

Αν το πολύωνμο έχει παράγοντα το  $(x - 1)$  και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με  $(x - 2)$  είναι  $-1$ , να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \quad \text{και στη συνέχεια να δείξετε ότι } \alpha = -9 \text{ και } \beta = 12.$$

β) Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

γ) Αν η γραφική παράσταση της  $P(x)$  είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.



**ΑΣΚΗΣΗ 13**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$  και  $g(x) = -x^2 + 4$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(-x) = f(x)$  και  $g(-x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

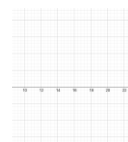
β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

ii. την ανίσωση  $f(x) < g(x)$ .



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις.

**ΑΣΚΗΣΗ 14**

Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$  και  $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$ . Το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $\delta(x)$ , είναι το πολυώνυμο  $\nu(x) = 24x - 24$ .

**α)** Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ .

**β)** Για  $\alpha = 2$ ,

- i.** να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x - 1$ .
- ii.** να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα  $x'x$  με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$ .
- iii.** να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

