

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Λογάριθμοι****ΛΥΣΕΙΣ****ΑΣΚΗΣΗ 1**

α) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta = \log_4 (3\alpha) - \log_4 \beta = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}.$$

β) Η παράσταση A με $3\alpha = 16\beta$, γράφεται:

$$A = \log_4 \frac{16\beta}{\beta} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2\log_4 4 = 2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) Είναι

$$\alpha + \gamma = \ln 2 + \ln 8 = \ln(2 \cdot 8) = \ln 16 = \ln 4^2 = 2\ln 4 = 2\beta.$$

β) Είναι $\beta + \gamma = \ln 4 + \ln 8 = \ln(4 \cdot 8) = \ln 32 = \ln 2^5 = 5\ln 2 = 5\alpha.$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Έχουμε: $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ και $\log_2 1 = 0$.

Οπότε $\log_2 8 + 2 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 0 = 3 + 1 = 4$.

β) Ισχύει $v = P(\rho)$ με $\rho = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι} \quad v &= P(2) = (\log_2 8) \cdot 2^3 + 4(\log_2 \sqrt{2}) \cdot 2^2 - (4 \log_2 1) \cdot 2 + 1990 \\ &= 8 \log_2 8 + 16 \log_2 \sqrt{2} - 8 \log_2 1 + 1990 \\ &= 8(\log_2 8 + 2 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 1) + 1990 \\ &\stackrel{(\alpha)}{=} 8 \cdot 4 + 1990 = 2022 \end{aligned}$$

Τελικά, το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x - 2)$ είναι ίσο με 2022.

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Είναι $\beta + \alpha = \log 20 + \log 50 = \log(20 \cdot 50) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$.

β) Είναι $\ln(\alpha + \beta) > \ln e \Rightarrow \alpha + \beta > e$ που ισχύει από α).

γ) Είναι $10^\beta - 10^\alpha = 10^{\log 50} - 10^{\log 20} = 50 - 20 = 30 = 10 \cdot (\beta + \alpha)$.



ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Είναι $1 < 3 < 4 \Leftrightarrow \log 1 < \log 3 < \log 4 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \beta$.

β) i. Είναι $\beta + \alpha = \log 4 + \log 3 = \log(4 \cdot 3) = \log 12 > \log 10 = 1$, οπότε πράγματι $\beta + \alpha > 1$.

ii. Είναι $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1 \Rightarrow \ln \frac{\alpha}{\beta} < \ln 1 \Rightarrow \ln \frac{\alpha}{\beta} < 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

α) Είναι

$$A = 2 \log 5 + 2 \log 2 = \log 5^2 + \log 2^2 = \log 25 + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log 100 = 2$$

β) Είναι $e^\lambda = A \Leftrightarrow e^\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \ln 2$.

γ) Είναι $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e \Leftrightarrow \lambda < 1 \Leftrightarrow \ln \lambda < \ln 1 \Leftrightarrow \ln \lambda < 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

α) Ισχύει ότι:

$$\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2,$$

$$\log 2 + \log 5 = \log(2 \cdot 5) = \log 10 = 1 \text{ και}$$

$$\log 1 = 0.$$

$$\text{Άρα, } \alpha = 2 + 1 + 0 = 3.$$

β) Για $\alpha = 3$ η εξίσωση γράφεται:

$$9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$



ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$, θα ισχύει ότι $P(1) = 0$.

Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 9 + \alpha - 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$.

β) Για $\alpha = 15$ έχουμε $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$.

i. Η διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ φαίνεται δίπλα.

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής:

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3).$$

ii. Αξιοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης έχουμε :

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(2x - 3) < 0$$

Το πρόσημο του πολυωνύμου

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3) \text{ φαίνεται στον πίνακα.}$$

Συνεπώς η ανίσωση

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(2x - 3) < 0 \text{ αληθεύει για}$$

$$\text{κάθε } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

iii. Είναι $\ln 2 < \ln e \Leftrightarrow \ln 2 < 1$ οπότε αφού δείξαμε παραπάνω ότι $P(x) < 0$ για κάθε

$$x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right), \text{ είναι } P(\ln 2) < 0.$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline -2x^3 + 6x^2 - 4x & 2x - 3 \\ \hline -3x^2 + 9x - 6 & \\ 3x^2 - 9x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$		
x^2-3x+2	+	○	-	-	○	+	
$2x-3$	-	-	○	+	+		
$P(x)$	-	○	+	○	-	○	+

ΑΣΚΗΣΗ 9

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x \neq 0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$. Επίσης,

$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$, για κάθε $x \in A$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι περιττή, δηλαδή η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

γ) Είναι $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ και αφού f περιττή είναι $f(\ln \frac{1}{2}) = f(-\ln 2) = -f(\ln 2)$, δηλαδή $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2}) = 0$.

δ) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$ και αφού f περιττή είναι $f(\eta\mu(\pi + \theta)) = f(-\eta\mu\theta) = -f(\eta\mu\theta)$, δηλαδή $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

α) Είναι $D = 10 \cdot \log\left(\frac{100}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log(10^2 \cdot 10^{12}) = 10 \cdot \log(10^{14}) = 10 \cdot 14 = 140 \text{ Db}$.

β) Είναι $D_2 - D_1 = 20$, οπότε $10 \cdot \log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{10^{-12}}\right) = 20$, άρα

$$\log(10^{12} I_2) - \log(10^{12} I_1) = 2 \Leftrightarrow \log\left(\frac{10^{12} I_2}{10^{12} I_1}\right) = 2 \Leftrightarrow \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^2.$$

Ωστε $I_2 = 100 \cdot I_1$.

γ) Έχουμε $120 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Leftrightarrow 12 = \log(I \cdot 10^{12}) \Leftrightarrow 10^{12} = I \cdot 10^{12} \Leftrightarrow I = 1 \text{ W/m}^2$

ΑΣΚΗΣΗ 11

α) Απο τον πίνακα φαίνεται οτι $D = 10$. Άρα έχουμε:

$$10 = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) \Leftrightarrow \log(10^{12} \cdot I) = 1 \Leftrightarrow 10^{12} \cdot I = 10 \Leftrightarrow I = \frac{10}{10^{12}} \Leftrightarrow I = 10^{-11}$$

Επομένως, η ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων είναι 10^{-11} W/m^2 .

β) Αφού $I = 1$, έχουμε:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 1) = 10 \cdot \log(10^{12}) = 10 \cdot 12 \cdot \log 10 = 120 \cdot 1 = 120$$

Επομένως, η ηχοστάθμη είναι 120 ντεσιμπέλ, δηλαδή αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν I είναι η αρχική ένταση του ήχου, τότε $D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$ είναι η αντίστοιχη ηχοστάθμη και για την D' έχουμε:

$$\begin{aligned} D' &= 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 2 I) = 10 \cdot [\log(2 \cdot 10^{12} \cdot I)] = 10 \cdot [\log 2 + \log(10^{12} \cdot I)] = \\ &= 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) = 10 \cdot 0,3 + D = 3 + D \end{aligned}$$

Επομένως, η ένταση του ήχου θα αυξηθεί κατά 3 ντεσιμπέλ.

