

§1.3 Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα**Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα**

Αν $\vec{a}$ μη μηδενικό διάνυσμα και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ τότε, ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{a}$ το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$, το οποίο:

- ❶ αν $\lambda > 0$ τότε ομόρροπο του $\vec{a}$.
- ❷ αν $\lambda < 0$ τότε αντίρροπο του $\vec{a}$.
- ❸ με μέτρο $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ όπου $|\lambda|$ η απόλυτη τιμή και $|\vec{a}|$ το μέτρο.
- ❹ Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$ τότε $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού

- ❶ $\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$.
- ❷ $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$
- ❸ $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$

Συνέπειες

- ❶ $\lambda \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$
- ❷ $(-\lambda \vec{a}) = \lambda(-\vec{a}) = -(\lambda \vec{a})$
- ❸ $\lambda(\vec{a} - \vec{\beta}) = \lambda \vec{a} - \lambda \vec{\beta}$
- ❹ $(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} - \mu \vec{a}$
- ❺ Αν $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$
- ❻ Αν $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε $\lambda = \mu$

Γραμμικός Συνδυασμός

Αν ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ παράγεται από άλλα δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τότε :

$\vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta}$ και ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$

Προσοχή : ένα διάνυσμα μπορεί να είναι γραμμικός συνδυασμός πολλών διανυσμάτων

$\vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} + \kappa \vec{\delta} + \nu \vec{\epsilon}$.

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

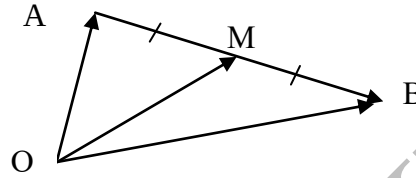
Αν $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε:

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Διανυσματική Ακτίνα Μέσου

Αν $\overline{AB}$ διάνυσμα και M το μέσο του, τότε αν O τυχαίο σημείο αναφοράς τότε:

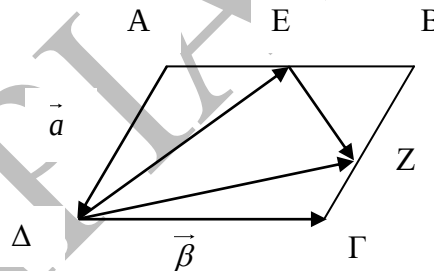
$$\begin{aligned} \text{Επειδή } \overline{AM} = \overline{MB} &\Leftrightarrow \overline{OM} - \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{OM} \\ \overline{OM} + \overline{OM} &= \overline{OA} + \overline{OB} \\ 2\overline{OM} &= \overline{OA} + \overline{OB} \\ \overline{OM} &= \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} \end{aligned}$$



Δηλαδή η διανυσματική ακτίνα του μέσου του διανύσματος είναι ίση με το ημιάθροισμα των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του διανύσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ στο διπλανό σχήμα με $\overline{\Delta\Gamma} = \overline{\beta}$ και $\overline{A\Delta} = \overline{\alpha}$. Αν το E είναι μέσο του AB και ισχύει $\overline{BZ} = \frac{2}{3}\overline{B\Gamma}$, να εκφράσετε συναρτήσει των διανυσμάτων $\overline{\alpha}$ και $\overline{\beta}$ τα διανύσματα $\overline{\Delta E}$, $\overline{\Delta Z}$, $\overline{EZ}$.

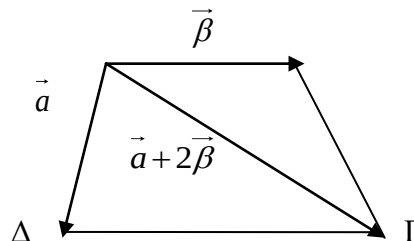
**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθεμία περίπτωση:

$$1) 2(\vec{x} - \vec{a}) - \frac{1}{2}(3\vec{x} - \vec{\beta}) = 2\vec{a} \quad 2) |\vec{a}|(\vec{\beta} - \vec{x}) = \vec{x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο στο διπλανό σχήμα είναι τραπέζιο.

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Δίνεται το τραπέζιο στο διπλανό σχήμα. Αν $(\Gamma\Delta) = 3(AB)$, $E\Gamma = 3EA$, $\overline{AB} = \overline{\alpha}$ και $\overline{B\Gamma} = \overline{\beta}$.

- 1) Να εκφράσετε συναρτήσει των $\overline{\alpha}$ και $\overline{\beta}$ τα διανύσματα $\overline{A\Gamma}$, $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{B\Delta}$.
- 2) Να δείξετε ότι τα σημεία B , Δ , E είναι συνευθειακά.

