

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

1. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$.
2. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$.
3. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$.
4. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$.
5. $\vec{i} \cdot \vec{j} = \dots\dots$ και $\vec{i}^2 = \dots\dots$
6. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots\dots\dots$
7. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \dots\dots\dots$
8. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} // y'y$, και $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ τότε $\dots\dots\dots$
9. Αν $\theta = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, τότε $\cos \theta = \dots\dots\dots$
10. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dots\dots\dots$
11. $\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \dots\dots\dots$
12. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \dots\dots\dots$
13. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \dots\dots\dots$

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ)

1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$.
2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$
3. $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| = 0$
4. $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
5. $\sqrt{\vec{\alpha}^2} = |\vec{\alpha}|$
6. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$.
7. $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|}$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$.
8. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$.
9. $\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$.
10. Αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ τότε $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω παραστάσεις με την ένδειξη Δ (Διάνυσμα) ή Α (Αριθμός)

1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
2. $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$
3. $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta}$
4. $\vec{\alpha}^2$
5. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

- 1) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- 2) τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$.
- 3) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 4) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $(\vec{u}, \vec{v})$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

- 1) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- 2) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 3) το μέτρο $|\vec{v}|$.
- 4) την γωνία των διανυσμάτων $(\vec{u}, \vec{v})$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΑΣΚΗΣΗ 3

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Έστω το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$.

- 1) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.
- 2) Να υπολογίσετε το $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$.
- 3) Να δείξετε ότι $|\vec{v}| = 2\sqrt{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω το διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

- 1) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- 2) το μέτρο $|\vec{u}|$.
- 3) την γωνία των διανυσμάτων $(\vec{u}, \vec{a})$

ΑΣΚΗΣΗ 5

- Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (2 + \sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3})$.
- Για ποια τιμή του x το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-1, x)$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{a} - 3\vec{\beta}$, έτσι ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{6}$.

- 1) Να αποδείξετε ότι $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6(1 - |\vec{\beta}|^2)$
- 2) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 1$
- 3) Να υπολογίσετε τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο είναι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.

Αν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω ΑΜ η διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ στο οποίο είναι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AM} = 3\vec{a} + \vec{\beta}$.

- 1) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
- 2) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{AG}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}, \vec{\beta}$
- 3) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.
- 4) Να αποδείξετε ότι $(\overrightarrow{AM}, \vec{a}) = \frac{\pi}{6}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνονται τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2$, και $|5\vec{a} + \vec{\beta}| = |2\vec{a} - \vec{\beta}|$.

- 1) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 3$
- 2) Να υπολογίσετε το $|3\vec{a} + 2\vec{\beta}|$

